Faculté des Sciences et Techniques
Tanger
Département de Mathématiques

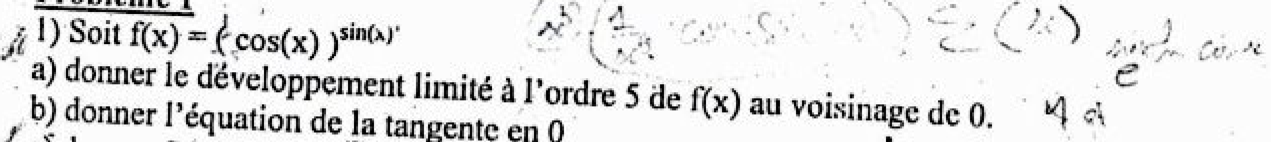
Année 2009-2010
1[ère] année MIPC-GEGM
Analyse I

CONTROLE CONTINUE N° 2

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent pour une partie importante dans l'appréciation de la copie.

Toute fraude ou tentative de fraude sera sévèrement sanctionnée

Problème 1



1) Soit $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)}$

a) donner le développement limité à l'ordre 5 de f(x) au voisinage de 0.

b) donner l'équation de la tangente en 0

c) donner $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

2) Soit $g(x) = (x^2-1)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

a) donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de g(x)

b) donner l'équation de l'asymptote à la courbe représentative Cg de g et sa position par rapport à Cg au voisinage de $+\infty$

Problème 2

1) Soit f une fonction continue de $[1, +\infty]$ dans R.

Montrer que si $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente alors $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est convergent.

2) a) Soient f une fonction continue de R dans R, u et v deux fonctions dérivables de R dans R. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$. En utilisant une primitive F de f démontrer que g est dérivable et que $g'(x) = u'(x).f[u(x)] - v'(x).f[v(x)]$

3) a) Calculer $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ b) Calculer $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}dx$

4) soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ $n \in N^*$ i) Montrer que l'intégrale I_n est convergente

ii) en faisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$ iii) calculer I_1

iv) Montrer que $I_n = \frac{(2n-2)!}{[2.4.6.......(2n-2)]^2}\frac{\pi}{2}$

5) Etudier la nature de l'intégrale généralisée $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Problème 3

1) Donner la solution générale y(x) de l'équation différentielle du premier ordre suivante

$y' - \cos(x)\,y = \sin(2x)$

2) Considérant l'équation différentielle d'ordre 2 suivante : $y'' - (m+1).y' + m.y = e^x$ ou m est un paramètre réel.

a) donner la solution générale $y_0(x)$ de l'équation sans second membre

b) donner la solution générale y(x) de l'équation complète.

Instituut en centrale CC2 ... 03-18

Problème 1 A / a/ $f(x) = \cos x^{\sin x} = e^{\sin x \ln \cos x}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$; $\ln \cos x = \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2}{2} + o(x^5)$

$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$

$\sin x \ln \cos x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{12} + o(x^5) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5)$

$f(x) = e^{-x^3/2 + o(x^5)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$

b/ $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^4)$; $f''(x) = -3x + o(x^3)$; $f'''(x) = -3 + o(x^2)$, $f^{(4)}(x) = 0 + o(x)$

$f'(0) = 0$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -3$ $f^{(4)}(0) = 0$

2/ $g(x) = (x^2-1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{\cdots}\right) = \left(\frac{1}{X^2} - 1\right)\ln\left(\frac{\frac{1}{X}+1}{\frac{1}{X}-1}\right)$

$\frac{x+1}{1-x}$	-1		1	
	$-$ 0	$+$	‖	$-$

$= \frac{1-X^2}{X^2}\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right) = \frac{1-X^2}{X^2}\left(\ln(1+X) - \ln(1-X)\right) = \frac{1-X^2}{X^2}\left(\left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4}\right) - \left(-X - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4}\right)\right)$

$= \frac{1-X^2}{X^2}\left(2X + \frac{2X^3}{3} + o(X^4)\right) = \frac{1}{X^2}\left(2X + \frac{2}{3}X^3 - 2X^3 + o(X^4)\right) = \frac{1}{X^2}\left(2X - \frac{4}{3}X^3 + o(X^4)\right)$

$= \frac{2}{X} - \frac{4}{3}X + o(X^2) = 2x - \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b/ $\lim_{+\infty} g(x) - 2x = \lim_{+\infty} -\frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow D : y = 2x$ est A.O en $+\infty$

$g(x) - 2x$ a le signe de $-\frac{4}{3x}$ donc $(\mathcal{G})$ est au dessous de D sur $]0, +\infty[$

Problème 2 1/ $t \in [1, +\infty[\Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \leq 1 \Rightarrow \frac{f(t)}{t} \leq f(t)$ si f est positive sur $[1, +\infty[$

alors $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt \leq \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$

Si $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ c.v alors $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ c.v

2/ F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$

d'où $g(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_{v(x)}^{u(x)} = F(u(x)) - F(v(x))$

F, u, v dérivables $\Rightarrow$ g dérivable et $g'(x) = F'(u(x)) \times u'(x) - F'(v(x)) \cdot v'(x)$

càd $g'(x) = u'(x)\, f(u(x)) - v'(x)\, f(v(x))$

3/ a/ $f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$

$x^5 + x^4 - 8$	$x^3 - 4x$
$4x^2 + 16x - 8$	$x^2 + x + 4$

$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16 - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2} \Rightarrow a = 2 ; b = 7 , c = 9$

d'où $f(x) = x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x-2} + \frac{9}{x+2}$

$F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 7\ln|x-2| + 9\ln|x+2| + K$

b/ $G(x) = \int \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}}{x(\sqrt{x} - 1)} dx$ On pose $x = t^4$ $dx = 4t^3 dt$

$G(x) = \int \frac{t^3 + t^2}{t^4(t^2-1)} \cdot 4t^3 dt = 4\int \frac{t}{t-1} dt = 4\int 1 + \frac{1}{t-1} dt = 4(t + \ln|t-1|) + k$
$= 4(\sqrt[4]{x} + \ln|\sqrt[4]{x} - 1|) + k$

4/ Voir TD

5/ $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ c.v si et ssi $\alpha < 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ c.v si et ssi $\alpha > 1$

donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: J diverge

Probleme 3 1/ $(E) : y' - \cos x . y = \sin 2x$

- Resolution de (E') : $y' - \cos x \, y = 0 \rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x . \Rightarrow \ln|y| = \sin x + C$

$\Rightarrow y_1 = k e^{\sin x}$ sol de (E')

- Determinons une solution particuliere de (E) sous la forme $y_0 = k e^{\sin x}$

on a $y_0' = k' e^{\sin x} + k \cos x \, e^{\sin x}$ Alors $y_0' - \cos x \, y_0 = \sin 2x$

$\Rightarrow k' e^{\sin x} + k \cos x \, e^{\sin x} - \cos x . k e^{\sin x} = \sin 2x \Rightarrow k' = \sin 2x \, e^{-\sin x}$

$k = 2\int \sin x \cos x \, e^{-\sin x} dx$ On pose $\begin{cases} u = \sin x \\ v' = \cos x \, e^{-\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \cos x \\ v = -e^{-\sin x} \end{cases}$

$k = 2(-\sin x \, e^{-\sin x} + \int \cos x \, e^{-\sin x} dx) = 2(-\sin x \, e^{-\sin x} - e^{-\sin x})$

d'où $y_0 = 2(-\sin x \, e^{-\sin x} - e^{-\sin x}) . e^{\sin x} = -2\sin x - 2$

et $y = y_1 + y_0 = k e^{\sin x} - 2\sin x - 2$

2/a/ $(E') : y'' - (m+1) y' + my = e^x$

l'equation caracteristique est : $r^2 - (m+1) r + m = 0$; $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$

Si $m = 1$ alors $r = \frac{-b}{2a} = 1$ et $y_1 = (\alpha x + \beta) e^x$

Si $m \neq 1$ alors $\Delta > 0$; $r_1 = \frac{m+1-m+1}{2} = 1$; $r_2 = \frac{m+1+m-1}{2} = m$

et $y_1 = \alpha e^x + \beta e^{mx}$

b/ 1° cas : Si $m = 1$ alors $(E) : y'' - 2y' + y = e^x$

la solution particuliere de (E) est $y_0 = a x^2 e^x$ ($\alpha = 1$ racine double de l'eq caracteristique)

$y_0' = a(2x + x^2) e^x$; $y_0'' = a(2 + 4x + x^2) e^x$

$y_0'' - 2y_0' + y_0 = e^x \Rightarrow a(2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2) = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$

$\Rightarrow y_0 = 1/2 \, x^2 e^x \Rightarrow y = y_1 + y_0 = (\alpha x + \beta) e^x + 1/2 \, x^2 e^x$

2° cas Si $m \neq 1$ alors $y_0 = a x e^x$ ($\alpha = 1$ est solution simple de l'eq caracteristique)

$y_0' = a(x+1) e^x$, $y_0'' = a(x+2) e^x$, $y_0'' - 2y_0' + y_0 = e^x \Rightarrow a = \frac{1}{1-m} \Rightarrow y_0 = \frac{x}{1-m} e^x$

$\Rightarrow y = y_1 + y_0 = \alpha e^x + \beta e^{mx} + \frac{x}{1-m} e^x$ solution de (E).


ETUSUP.com